BƯỚC NHẢY VIETE

Hà Tuấn Dũng

Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Tóm tắt nội dung

Phương trình nghiệm nguyên hay còn gọi là phương trình Diophant là chủ đề thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Bài viết giới thiệu phương pháp: Bước nhảy Viete - một trong những phương pháp thường được sử dụng để giải quyết các bài toán liên quan đến phương trình Diophant.

1. MỞ ĐẦU

Năm 1879, Andrei Andreevich Markov (1856-1922) - nhà toán học nổi tiếng người Nga đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ tại trường Đại hoc Saint Petersburg với chủ đề: "Dạng toàn phương xác định dương". Luận án tiến sĩ của Markov đã giải quyết được một số vấn đề khó trong "Lý thuyết số" và mở ra một hướng nghiên cứu trong toán học, đó là: "Lý thuyết xấp xỉ Diophant". Phương trình Markov - một phương trình Diophant bậc hai đặc biệt đóng vai trò chủ đạo trong các nghiên cứu của Markov về các dạng toàn phương, là phương trình có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Ta thấy rằng phương trình Markov có một nghiệm hiển nhiên $(1, 1, 1)$. Đặt:

$$S = \left\{(x, y, z)\,; x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\right\}$$

là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Markov thì $S \neq \varnothing$. Do vai trò của x, y, z trong phương trình là như nhau, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$. Với $(x, y, z) \in S$; $(x', y', z') \in S$ ta định nghĩa $(x, y, z) > (x', y', z')$ nếu $x + y + z > x' + y' + z'$. Markov đã dùng ý tưởng "thông minh" sau đây để chứng minh có vô hạn bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn phương trình trên.

Với mỗi nghiệm $(x_n, y_n, z_n) \in S$ ta xây dựng bộ nghiệm mới như sau. Ta coi x là ẩn và các biến còn lại là các tham số thì rõ ràng phương trình bậc hai:

$$x^2 - 3y_nz_nx + y_n^2 + z_n^2 = 0$$

có một nghiệm là x_n, nên nó có nghiệm thứ hai là x'. Theo định lí Viete, ta có:

$$x_n + x' = 3y_nz_n \qquad \text{và} \qquad x_nx' = y_n^2 + z_n^2 \quad (1)$$

Từ đây ta được x' là một số nguyên dương, kết hợp giả thiết $x_n \leq y_n \leq z_n$ với (1) ta được

$$x' = \frac{y_n^2 + z_n^2}{x_n} \geq \frac{2x_n^2}{x_n} = 2x_n > x_n$$

Đặt $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (x', y_n, z_n)$ thì $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ là một nghiệm của phương trình Markov. Cách xây dựng này cho ta một dãy vô hạn các nghiệm của phương trình Markov vì các nghiệm tiếp theo lớn hơn các nghiệm trước theo định nghĩa thứ tự ở trên. Do đó phương trình Markov có vô số nghiệm.

Ta thấy ý tưởng của Markov trong chứng minh trên là coi một biến là nghiệm của tam thức bậc hai khi cố định các nghiệm còn lại để từ đó xây dựng nghiệm mới từ một nghiệm đã biết bằng các hệ thức Viete. Cụ thể ta xét phương trình Diophant là phương trình bậc hai đối với một biến nào đó, chẳng hạn:

$$x_0^2 + G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Nếu phương trình này có nghiệm $(a_0, a_1, ..., a_n)$ thì rõ ràng là a_0 là nghiệm của phuong trình

$$X^2 + G(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$$

Phương trình trên phải còn một nghiệm nữa là a_0'. Kết hợp với định lí Viete với dữ kiện của đầu bài ta sẽ "xây dựng" $(a_0', a_1, ..., a_n)$ là nghiệm của phương trình trên.

Ý tưởng đó chính là nội dung của phương pháp "Bước nhảy Viete", một phương pháp thường được sử dụng trong các bài toán số học liên quan đến phương trình Diophant. Mục tiêu của bài viết này là giới thiệu phương pháp bước nhảy Viete thông qua một số bài toán số học xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Phần còn lại của bài viết được bố cục như sau: Mục 2 chúng tôi giới về phương pháp bước nhảy Viete qua các bài tập cụ thể, Mục 3 là các bài tập có sử dụng phương pháp bước nhảy Viete.

2. BƯỚC NHẢY VIETE QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài toán đầu tiên sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi: *"Nếu tổng bình phương S ba số nguyên dương chia hết cho tích Pcủa chúng thì khi đó $S : P$ bằng bằng bao nhiêu?"*.

Bài toán 1. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz.$$

có nghiệm nguyên dương (nghĩa là mỗi nghiệm gồm ba số nguyên dương x, y, z).

Lời giải. Với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^2 - kxyz + y^2 + z^2 = 0. \tag{2.1}$$

Giả sử k là số nguyên dương sao cho phương trình (2.1) có nghiệm nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S = \left\{(x, y, z)\,; x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 - kxyz + y^2 + z^2 = 0\right\}.$$

Theo điều giả sử ở trên thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý cực hạn tồn tại $(x_0, y_0, z_0) \in S$ sao cho $x_0 + y_0 + z_0$ là nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(x_0, y_0, z_0) \in S$ thì $(y_0, z_0, x_0) \in S$, $(z_0, x_0, y_0) \in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0 \geq y_0 \geq z_0$. Phương trình

$$f(x) = x^2 - xky_0z_0 + y_0^2 + z_0^2 = 0.$$

có một nghiệm hiển nhiên là x_0. Gọi nghiệm còn lại là x_1. Theo định lí Viete, ta có

$$x_0 + x_1 = ky_0z_0 \quad \text{và} \quad x_0x_1 = y_0^2 + z_0^2$$

Từ đây, ta được $x_1 \in \mathbb{Z}^+$, do đó $(x_1, y_0, z_0) \in S$, theo cách xác định (x_0, y_0, z_0) thì

$$x_1 + y_0 + z_0 \geq x_0 + y_0 + z_0 \quad \text{hay} \quad x_1 \geq x_0$$

Do đó, ta có: $x_1 \geq x_0 \geq y_0 \geq z_0 \quad (1)$. Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai và từ (1) ta được:

$$0 \leq f(y_0) = y_0^2 - ky_0^2z_0 + 2y_0^2 = y_0^2(3 - kz_0).$$

Suy ra: $kz_0 \leq 3 \Rightarrow k \leq kz_0 \leq 3$ mà $k \in \mathbb{Z}^+$ nên $k \in \{1, 2, 3\}$.

- Nếu $k = 1$, phương trình (2.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = z = 3$.
- Nếu $k = 2$, thì từ $kz_0 \leq 3$ ta được $z_0 = 1$ khi đó ta có $(x_0 - y_0)^2 + 1 = 0$ mâu thuẫn.
- Nếu $k = 3$, phương trình (2.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = z = 1$.

Vậy với $k \in \{1, 3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét.

Trong bài toán này, ta đã "ngầm" thiết lập một quan hệ thứ tự trên S, đó là: nếu $(x, y, z) \in S, (x', y', z') \in S$ thì $(x, y, z) > (x', y', z') \iff x + y + z > x' + y' + z'$, sau đó dựa vào nguyên lý sắp thứ tự tốt: " Một tập hợp khác rỗng bất kì của các số tự nhiên bao giờ cũng có phần tử bé nhất" để chỉ ra (x_0, y_0, z_0) là nghiệm nhỏ nhất theo quan hệ thứ tự nói trên. Nhờ phương pháp bước nhảy Viete ta đã xây dựng được nghiệm (x_1, y_0, z_0) từ nghiệm (x_0, y_0, z_0) để từ đó thiết lập được quan hệ "$x_1 \geq x_0 \geq y_0 \geq z_0$". Từ đó, với định lý dấu của tam thức bậc hai ta tìm được các giá trị k thỏa mãn điều kiện bài toán. Bằng cách làm tương tự ta có thể giải quyết được bài toán trong Kỳ thi học sinh giỏi Quốc Gia môn toán lớp 12 (VMO) năm 2002:

Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình:

$$x + y + u + v = n\sqrt{xyuv}$$

có nghiệm nguyên dương x, y, u, v.

Bài toán 2. (*IMO 2003*) Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

là một số nguyên dương.

Lời giải. Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn điều kiện bài toán. Đặt $k = \dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ thì k là số nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S = \left\{(a, b)\,; a, b \in \mathbb{Z}^+ \mid a^2 - 2akb^2 + k\left(b^3 - 1\right) = 0\right\}.$$

Theo điều giả sử ở trên thì $S \neq \varnothing$. Do $k \in \mathbb{Z}^+$ nên với $(a, b) \in S$ ta có:

$$2ab^2 - b^3 + 1 > 0 \Rightarrow b^2\,(2a - b) > -1 \Rightarrow b^2(2a - b) \geq 0$$

Do đó $2a = b$ hoặc $2a > b$, nếu $2a > b$ kết hợp với $k \geq 1$, ta được:

$$a^2 \geq 2ab^2 - b^3 + 1 > b^2\,(2a - b) \geq b^2$$

Từ đó suy ra nếu $(a, b) \in S$ thì $2a = b$ hoặc $a > b$. Gọi (a_0, b_0) là một phần tử bất kì thuộc S . Xét phương trình:

$$T^2 - 2Tkb_0^2 + k(b_0^3 - 1) = 0$$

là một phương trình bậc hai ẩn T có một nghiệm là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo công thức Viete ta có

$$a_0 + a_1 = 2kb_0^2 \quad \text{và} \quad a_0a_1 = k\left(b_0^3 - 1\right)$$

Từ đây ta có $a_1 \in \mathbb{Z}$ và $a_1 \geq 0$. Nếu $a_1 = 0$, thì từ các hệ thức Viete, ta có $b_0 = 1$ và $a_0 = 2k$, ta được $(2k, 1)$ là một cặp số thõa mãn điều kiện bài toán. Nếu $a_1 \in \mathbb{Z}^+$ thì $(a_1, b_0) \in S$. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1 \geq a_0$. Chú ý rằng theo nhận xét ở trên thì $2a_0 = b_0$ hoặc $a_0 > b_0$. Nếu $a_0 > b_0$ thì $a_1 \geq a_0 > b_0$ kết hợp với các hệ thức Viete ta được

$$kb_0^2 \leq a_1 = \frac{k(b_0^3 - 1)}{a_0} \leq \frac{k(b_0^3 - 1)}{b_0} < kb_0^2$$

. Mâu thuẫn. Với $2a_0 = b_0$ thì ta được $(k, 2k)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ hệ thức Viete $a_0a_1 = k\left(b_0^3 - 1\right)$ ta thu được $(8k^3 - 1, 2k)$ là một cặp số cần tìm. Vậy các cặp số (a, b) thỏa mãn điều kiện bài toán là $(2k, 1)$, $(k, 2k)$ và $(8k^3 - 1, 2k)$ với $k \in \mathbb{Z}^+$.

Nhận xét.

Bài toán cho thấy được ứng dụng của phương phương pháp bước nhảy Viete trong việc tìm nghiệm của phương trình Diophant. Mấu chốt của bài toán là phải phát hiện ra mối quan hệ nếu $(a, b) \in S$ thì $2a = b$ hoặc $a > b$. Phương trình: $a^2 - 2akb^2 + k\left(b^3 - 1\right) = 0$ là phương trình bậc hai đối với ẩn a nên ta vẫn áp dụng được phương pháp bước nhảy Viete để xác định được nghiệm của bài toán. Chú ý rằng khi tìm được $(a_0, b_0) = (2k, k)$ thì ta phải tìm a_1 vì (a_1, b_0) cũng là nghiệm, nếu không sẽ dẫn đến việc làm mất nghiệm $(8k^3 - 1, 2k)$ của bài toán.

Bài toán 3. (*IMO 2007*) Cho trước a và b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số $4ab - 1$ là ước số của $(4a^2 - 1)^2$ thì $a = b$.

Lời giải. Theo giả thiết thì $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ nên ta có

$$4ab-1 \mid b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a^3b-2ab+a^2)=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Đặt: $k=\dfrac{(a-b)^2}{4ab-1}$ thì $k\in\mathbb{Z}^+$. Cố định k và xét tập hợp

$$S=\left\{(a,b)\,;a,b\in\mathbb{Z}^+;a\neq b \mid a^2-2ab(k+2)+b^2+k=0\right\}.$$

Giả sử $S\neq\varnothing$, khi đó theo nguyên lý cực hạn tồn tại cặp số $(a_0,b_0)\in S$ sao cho $a_0\neq b_0$ và a_0+b_0 nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0,b_0)\in S$ thì $(b_0,a_0)\in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0>b_0$. Phương trình

$$T^2-2Tb_0(k+2)+b_0^2+k=0.$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viete ta có

$$a_0+a_1=2b_0(k+2) \quad \text{và} \quad a_0a_1=b_0^2+k$$

Từ đây ta được $a_1\in\mathbb{Z}^+$, do đó $(a_1,b_0)\in S$, theo cách xác định (a_0,b_0) thì

$$a_1+b_0\geq a_0+b_0 \quad \text{hay} \quad a_1\geq a_0.$$

Kết hợp với định lí Viete ta được

$$a_0=\frac{b_0^2+k}{a_1}\leq\frac{b_0^2+k}{a_0} \quad \text{hay} \quad k\geq a_0^2-b_0^2.$$

Do đó, ta có:

$$\frac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1}=k\geq a_0^2-b_0^2=(a_0-b_0)(a_0+b_0)$$

mà $a_0>b_0$ nên $a_0-b_0\geq 1$. Vì vậy

$$a_0-b_0\geq(a_0+b_0)(4a_0b_0-1)>a_0+b_0$$

mâu thuẫn. Như vậy điều giả sử là sai, hay $S=\varnothing$. Từ đó ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Với cách phát biểu của bài toán thì ta không thể thể áp dụng phương pháp bước nhảy Viete vì khi đó phương trình cần xét sẽ là một phương trình bậc bốn ẩn a. Để có thể áp dụng được, ta đã biến đổi điều kiện ban đầu của bài toán trở thành *số* $4ab-1$ *là ước số của* $(a-b)^2$. Sau đó sử dụng phản chứng kết hợp với phương pháp bước nhảy Viete và nguyên lý sắp thứ tự tốt ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của k để phương trình

$$a^2+b^2-kab-k=0.$$

có ngiệm nguyên dương.

Lời giải.

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương (a, b). Cố định k và xét tập hợp

$$S = \left\{(a, b)\,; a, b \in \mathbb{Z}^+ \mid a^2 + b^2 - kab - k = 0\right\}.$$

Theo điều giả sử trên thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý cực hạn tồn tại (a_0, b_0) sao cho $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0, b_0) \in S$ thì $(b_0, a_0) \in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 \leq b_0$. Phương trình

$$T^2 - kTb_0 + b_0^2 - k = 0.$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viete ta có

$$a_0 + a_1 = kb_0 \quad (1) \qquad \text{và} \qquad a_0a_1 = b_0^2 - k$$

Từ (1) ta có a_1 là số nguyên. Ta sẽ chứng minh $a_1 \geq 0$. Thật vậy, nếu $a_1 < 0$ thì

$$0 = a_1^2 - ka_1b_0 + b_0^2 - k > a_1^2 + k + b_0^2 - k = a_1^2 + b_0^2$$

mâu thuẫn. Do đó $a_1 \geq 0$, nếu $a_1 > 0$ thì $(a_1, b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0, b_0) thì

$$a_1 + b_0 \geq a_0 + b_0 \quad \text{hay} \quad a_1 \geq a_0.$$

Từ đó ta có:

$$b_0^2 > b_0^2 - k = a_0a_1 \geq a_0^2 \quad \text{hay} \qquad b_0 > a_0.$$

mâu thuẫn. Vì vậy $a_1 = 0$, khi đó $k = b_0^2$, hay k là một số chính phương. Đảo lại với $k = m^2$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương là (m, m^3). Vậy k là số chính phương thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét.

Bài toán trên là cách phát biểu khác của bài toán số 6 trong Kỳ thi Olympic Toán học quốc tế năm 1988 (đó là bài toán khó nhất trong kỳ thi và chỉ có 11 thí giải có lời giải hoàn chỉnh). Đây cũng là một trong những ví dụ "nổi tiếng nhất" trong việc sử dụng phương pháp bước nhảy Viete. Qua ví dụ này ta thấy rằng nguyên lý sắp thự tốt thường "song hành" với phương pháp bước nhảy Viete trong các bài toán về biện luận phương trình Diophant bậc hai.

Bài toán 5. Cho a, b là các số nguyên dương với $ab \neq 1$. Giả sử rằng $ab - 1$ chia hết $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5.$$

Lời giải. Đặt $k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab - 1}$, thì k là số nguyên dương. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} \geq \frac{2ab}{ab - 1} = 2 + \frac{2}{ab - 1} > 2 \quad \text{hay} \qquad k \geq 3$$

Nếu $a = b$ thì ta được: $k = 2 + \dfrac{2}{a^2 - 1} < 3$, mâu thuẫn. Ta sẽ chứng minh $k = 5$. Thật vậy, cố định k và xét tập hợp

$$S = \left\{ (a, b)\,; a, b \in \mathbb{Z}^+ \mid k = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} \right\}$$

. Theo giả thiết thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý cực hạn tồn tại (a_0, b_0) sao cho $a_0 + b_0$ là nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0, b_0) \in S$ thì $(b_0, a_0) \in S$, kết hợp với nhận xét ở trên không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 > b_0$. Phương trình

$$\frac{T^2 + b_0^2}{Tb_0 - 1} = k \Leftrightarrow T^2 - kTb_0 + b_0^2 + k = 0$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viete ta có

$$a_0 + a_1 = kb_0 \quad \text{và} \quad a_0.a_1 = b_0^2 + k.$$

Từ đây, ta được $a_1 \in \mathbb{Z}^+$, do đó $(a_1, b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0, b_0) thì

$$a_1 + b_0 \geq a_0 + b_0 \quad \text{hay} \quad a_1 \geq a_0.$$

Vì $a_0 > b_0$ nên $a_0 \geq b_0 + 1$, từ đó ta thu được

$$b_0^2 + k - kb_0 = a_0.a_1 - a_0 - a_1 = (a_0 - 1)(a_1 - 1) - 1 \geq b_0^2 - 1$$

. Do đó: $k.(b_0 - 1) \leq 1$. Nếu $b_0 \neq 1$ theo chứng minh trên thì $k.(b_0 - 1) \geq 3 > 1$, vì vậy ta phải có $b_0 = 1$. Khi đó: $a_0 + a_1 = k$ và $a_0a_1 = k + 1$, suy ra $a_0a_1 - a_0 - a_1 - 1 = 0$ hay $(a_0 - 1)(a_1 - 1) = 2$ mà $a_1 \geq a_0$ nên $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, từ đây ta được $k = a_0 + a_1 = 5$. Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Phương pháp làm bài toán này tương tự với bài toán 4, đó là bước nhảy Viete kết hợp với nguyên lí cực hạn. Từ chứng minh bài toán, ta thu được $(a, b) = (2, 1)$ là cặp số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán theo nghĩa tổng của $a + b$ là nhỏ nhất. Một câu hỏi "tự nhiên" được đặt ra khi đã làm xong bài toán 4 và 5 là liệu có bao nhiêu cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn điều kiện bài toán và chúng được "mô tả" như thế nào. Bài toán số 5 trong Kỳ thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi OlympicToán Quốc tế (VN TST) năm 1992 sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi trên.

Bài toán 6. (*VNTST 1992*) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình:

$$x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0. \tag{2.2}$$

Lời giải.
Bổ đề. Xét hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định như sau

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$$

$$v_0 = 1, v_1 = 3, v_{n+2} = 5v_{n+1} - v_n$$

Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}$, các cặp số (u_n, u_{n+1}) và (v_n, v_{n+1}) là nghiệm nguyên dươngcủa phương trình (2.2).

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *thì* (u_n, u_{n+1}) *là nghiệm của phương trình* (2.2)(1) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n = 0$, ta có: $u_1^2 + u_0^2 - 5u_0u_1 = -5$. Do đó (u_0, u_1) là nghiệm của phương trình (2.2). Như vậy mệnh đề (1) đúng với $n = 0$, giả sử mệnh đề (1) đúng với $n = k > 0$, tức là

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 - 5u_ku_{k+1} + 5 = 0$$

Khi đó

$$u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 - 5u_{k+1}u_{k+2} = u_{k+2}(u_{k+2} - 5u_{k+1}) + u_{k+1}^2 = -u_k.u_{k+2} + u_{k+1}^2 = u_{k+1}^2 + u_k^2 - 5u_ku_{k+1}$$

Từ giả thiết quy nạp, ta được: $u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 - 5u_{k+1}u_{k+2} + 5 = 0$. Do đó (u_{k+1}, u_{k+2}) cũng là nghiệm của phương trình (2.2). Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh tương tự ta cũng thu đươc với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì (v_n, v_{n+1}) là nghiệm của phương trình (2.2). Từ công thức xác định số hạng tổng quát của hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ ta được các số hạng của hai dãy đều là các số nguyên dương. Do đó các cặp số (u_n, u_{n+1}) và (v_n, v_{n+1}) là nghiệm nguyên dươngcủa phương trình (2.2). Bổ đề được chứng minh.

$\square$

Quay trở lại bài toán. Xét tập hợp: $S = \big\{(a, b)\,; a, b \in \mathbb{Z}^+ \mid a^2 - 5ab + b^2 + 5 = 0\big\}$. Với $(a, b) \in S$ nếu $a = b$ thì từ (2.2) ta có: $3a^2 - 5 = 0 \Rightarrow a^2 = \dfrac{5}{3}$, từ đây ta được $a = 1$, nhưng với $a = b = 1$ thì từ (2.2) ta có $2 = 0$, mâu thuẫn do đó $a \neq b$. Ta thấy rằng nếu $(a, b) \in S$ thì $(b, a) \in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử với mọi $(a, b) \in S$ thì $a < b$.

Với (a, b) là một phần tử bất kì thuộc S. Xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_0 = b, a_1 = a, a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Từ (2.2) ta có: $b(5a - b) = a^2 + 5 > 0 \Rightarrow 5a > b$. Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ ta được $a_n \in \mathbb{Z}^+$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $(a_0, a_1) = (a, b) \in S$, giả sử $(a_k, a_{k+1}) \in S$ với mọi $k \geq 1$, khi đó:

$$a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 - 5a_{k+1}a_{k+2} = a_{k+2}(a_{k+2} - 5a_{k+1}) + a_{k+1}^2 = -a_k.a_{k+2} + a_{k+1}^2 = a_{k+1}^2 + a_k^2 - 5a_ka_{k+1}$$

. Từ đây ta được $(a_{k+1}, a_{k+2}) \in S$, theo nguyên lý quy nạp toán học thì $(a_n, a_{a+1}) \in S$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu $a = 1$ thì từ (2.2) ta được $b^2 - 5b + 6 = 0$ hay $b \in \{2, 3\}$. Nếu $b = 2$ khi đó $(a, b) = (u_0, u_1)$, nếu $b = 3$ thì $(a, b) = (v_0, v_1)$. Ta xét trường hợp $a > 1$, khi đó

$$(4a - b)(a - b) = 3a^2 - 5 > 0 \text{ mà } a < b \text{ nên } 4a < b.$$

mà $a_0 > a_1$ nên từ đây ta được $a_n > a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy với $a > 1$ thì dãy $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt, nên phải tồn tại một chỉ số k sao cho $a_0 > a_1 > ... > a_{k+1} = 1$. Do (a_k, a_{k+1}) là một nghiệm của phương trình (2.2) nên ta có $a_k \in \{2, 3\}$. Với $a_k = 2$ thì

$$a_{k+1} = u_0,\ a_k = u_1 \text{ và } a_{k-1} = 5a_k - a_{k+1} = 5u_1 - u_0 = u_2.$$

từ đó ta được $u_i = a_{k+1-i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, mà theo bổ đề thì (u_n, u_{n+1}) là một nghiệm của phương trình (2.2). Do đó nếu $(a, b) \in S$ thì a, b là các số hạng liên tiếp của dãy $\{u_n\}$ Tương tự với $a_k = 3$ thì a, b là các số hạng liên tiếp của dãy $\{v_n\}$. Như vậy các bộ (u_n, u_{n+1}) và (v_n, v_{n+1}) (với mọi $n \in \mathbb{N}$) là tập tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (2.2).

Nhận xét.

Ta thiết lập quan hệ thứ tự trong S như sau nếu $(x, y) \in S$, $(x', y') \in S$ thì $(x, y) > (x', y') \Leftrightarrow x > x'$ và $y > y'$. Từ một nghiệm bất kì của phương trình (2.2)bằng phương pháp bước nhảy Viete ta thiết lập được nghiệm mới nhỏ hơn nghiệm (a, b) theo quan hệ thứ tự nói trên. Từ nghiệm vừa mới thu được này ta lại xây dựng nghiệm mới nhỏ hơn, cứ tiếp tục quá trình như vậy đến khi không thể xây dựng được nữa. Khi đó, ta thu được nghiệm nhỏ nhất. Dãy $\{a_n\}$ đã mô tả các nghiệm của phương trình (2.2) được xây dựng từ quá trình trên và được xây dựng dựa vào các tính chất: a, b là hai số hạng đầu tiên của dãy; (a_i, a_{i+1}) là một nghiệm của phương trình (2.2). Để xác định được công thức truy hồi của dãy $\{a_n\}$ ta đã sử dụng phương pháp bước nhảy Viete. Xét phương trình

$$T^2 - 5Ta_{n+1} + a_{n+1}^2 + 5 = 0$$

có một nghiệm là a_n, gọi nghiệm còn lại là a_{n+2} thì theo hệ thức Viete ta có:

$$a_n + a_{n+2} = 5a_{n+1}(1) \qquad \text{và} \qquad a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 5 \quad .$$

Từ đây ta có a_{n+2} là số nguyên dương, do đó (a_n, a_{n+2}) cũng là một nghiệm của phương trình, và từ (1) ta được$a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$. Sau khi thu được nghiệm nhỏ nhất, ta xây dựng các nghiệm của phương trình từ nghiệm nhỏ nhất đó thông qua hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$.

Bài toán 7. (*VMO-2012*) Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên $\{v_n\}$ được xác định như bởi

$$v_1 = v_2 = 1 \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Lời giải. Đặt $d = (a, b)$, khi đó ta có $d \mid a$, $d \mid b$ mà $b \mid a^2 + 2$ nên $d \mid a^2 + 2 - a^2$ hay $d \mid 2$. Vì a, b là các số tự nhiên lẻ nên d là số tự nhiên lẻ, do đó $d = 1$. Ta có $a \mid a^2 + b^2 + 2$, $b \mid a^2 + b^2 + 2$, mà $(a, b) = 1$ nên $a^2 + b^2 + 2$ chia hết cho ab. Ngược lại nếu $ab \mid a^2 + b^2 + 2$ thì ta cũng có $a \mid b^2 + 2$ và $b \mid a^2 + 2$. Ta thấy giả thiết của đề bài tương đương với việc tồn tại số nguyên dương k sao cho $a^2 + b^2 + 2 = kab \Leftrightarrow a^2 - kab + b^2 + 2 = 0$. Xét tập hợp

$$S = \left\{ (a, b)\,; a, b \in \mathbb{Z}^+; a, b \not\vdots 2 \mid a^2 - akb + b^2 + 2 = 0 \right\}.$$

theo giả thiết thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý cực hạn tồn tại cặp số $(a_0, b_0) \in S$ sao cho $a_0 \neq b_0$ và $a_0 + b_0$ nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0, b_0) \in S$ thì $(b_0, a_0) \in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 \geq b_0$. Phương trình:

$$T^2 - Tkb_0 + b_0^2 + 2 = 0$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viete ta có

$$a_0 + a_1 = kb_0 \quad \text{và} \quad a_0a_1 = b_0^2 + 2 \quad (1)$$

Từ đây, ta được $a_1 \in \mathbb{Z}^+$, do đó $(a_1, b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0, b_0) thì

$$a_1 + b_0 \geq a_0 + b_0 \quad \text{hay} \quad a_1 \geq a_0.$$

Từ (1) ta có

$$a_0 = \frac{b_0^2 + 2}{a_1} \leq \frac{b_0^2 + 2}{a_0} \Rightarrow a_0^2 - b_0^2 \leq 2 \Rightarrow (a_0 - b_0)(a_0 + b_0) \leq 2 \quad (2).$$

Nếu $a_0 \neq b_0$ thì ta có $a_0 - b_0 \geq 1$, từ (2) ta được $a_0 + b_0 \leq 2$ suy ra $a_0 = b_0 = 1$, mâu thuẫn. Do đó $a_0 = b_0$, từ (1) ta được $a_0a_1 = a_0^2 + 2$ hay $a_0(a_1 - a_0) = 2$, mà a_0 là số lẻ nên $a_0 = 1$ và $a_1 = 2 + a_0 = 3$. Khi đó $k = 4$, như vậy nếu a, b là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện đề bài thì

$$a^2 + b^2 - 4ab + 2 = 0 \tag{2.3}$$

Từ công thức xác định của dãy $\{v_n\}$, ta được mọi số hạng của dãy đều là số tự nhiên lẻ. Ta thấy $(v_0, v_1) = (1, 1) \in S$, giả sử $(v_k, v_{k+1}) \in S$ với mọi $k \geq 1$, khi đó ta có $v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 - 4v_{k+1}v_{k+2} = v_{k+2}(v_{k+2} - 4v_{k+1}) + v_{k+1}^2 = -v_k.v_{k+2} + v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 + v_k^2 - 4v_kv_{k+1}$. mà theo giả thiết thì $(v_k, v_{k+1}) \in S$ nên $v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 - 4v_{k+1}v_{k+2} + 2 = 0$, do đó $(v_{k+1}, v_{k+2}) \in S$ theo nguyên lý quy nạp toán học thì $(v_n, v_{n+1}) \in S$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với (a, b) là một phần tử bất kì thuộc S, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a < b$ xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_0 = b, a_1 = a, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Từ (2.3) ta có: $b(4a - b) = a^2 + 2 > 0 \Rightarrow 4a > b$. Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ ta được $a_n \in \mathbb{Z}^+$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi số hạng của dãy đều là số lẻ. Chứng minh tương tự như đối với dãy $\{v_n\}$ ta được $(a_n, a_{n+1}) \in S$ mọi $n \in \mathbb{N}$. Nếu $a = 1$ thì từ (2.3) ta được $b^2 - 4b + 3 = 0$ hay $b \in \{1, 3\}$. Nếu $b = 1$ khi đó $(a, b) = (u_0, u_1)$, nếu $b = 3$ thì $(a, b) = (u_1, u_2)$. Ta xét trường hợp $a > 1$, khi đó

$$(3a - b)(a - b) = 2a^2 - 5 > 0 \text{ mà } a < b \text{ nên } 3a < b.$$

mà $a_0 > a_1$ nên từ đây ta được $a_n > a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy với $a > 1$ thì dãy $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt, nên phải tồn tại một chỉ số k sao cho $a_0 > a_1 > ... > a_{k-1} = 1$. Do (a_{k-2}, a_{k-1}) là một nghiệm của phương trình (2.3) nên ta có $a_{k-2} \in \{1, 3\}$ mà $a_{k-2} > a_{k-1}$ nên $a_{k-2} = 3$ suy ra $a_k = 4a_{k-1} - a_{k-2} = 1$. Khi đó ta có

$$a_k = v_0,\ a_{k-1} = v_1 \text{ và } a_{k-2} = 3 = v_3.$$

Từ đó ta được $v_i = a_{k-i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, theo chứng minh ở trên thì $(v_n, v_{n+1}) \in S$. Từ đây ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Về mặt ý tưởng thì bài toán trên là sự kết hợp khéo léo của hai bài toán 5 và 6. Bài toán có thể phát biểu như sau: Tìm tất cả các nghiệm tự nhiên của phương trình

$$a^2 + b^2 - abc + 2 = 0$$

trong đó a, b là các số tự nhiên lẻ. Dưới đây là một bài tương tự

(***Olympic Toán Canada 1998***) *Cho m là một số nguyên dương. Dãy số $\{u_n\}_{n\geq 0}$ được xác định như sau $a_0 = 0$. $a_1 = m$ và $a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$ Chứng minh rằng các cặp số (a, b) với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq b$, là nghiệm của phương trình*

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$$

khi và chỉ khi $(a, b) = (a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. (*Olympic 30-4 lớp 10 2014*) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình:

   $$x^2 + y^2 + x + y = kxy.$$

   có nghiệm nguyên dương.

2. (*VNTST 1994*) Cho phương trình:

   $$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - Nxyzt - N = 0.$$

   trong đó N là số nguyên dương cho trước.

   a) Chứng tỏ rằng có vô số giá trị nguyên dương n để phương trình trên có nghiệm nguyên dương (nghĩa là mỗi nghiệm gồm bốn số nguyên dương x, y, z, t).

   b) Giả sử $N = 4^k(8m + 7)$ với k, m là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng khi đó phương trình trên không có nghiệm nguyên dương.

3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương

   $$x^2 + y^2 = n(x + 1)(y + 1).$$

4. (*Olympic Taiwan 1998*) Cho m, n là hai số lẻ với $m > n > 1$ thỏa mãn
$$m^2 - n^2 + 1 \mid n^2 - 1.$$
Chứng minh rằng $m^2 - n^2 + 1$ là số chính phương.

5. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình
$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy.$$
là $(x, y) = (F_{2k-1}, F_{2k+1})$ với F_n là số Fibonacci.

6. (*Đề thi trường Đông phía Bắc 2015*) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình:
$$x^2 - (k^2 - 4)y^2 + 24 = 0.$$
có nghiệm nguyên dương.

7. (*Olympic Turkey 1994*) Tìm tất cả các cặp số (a, b) mà $ab \mid a^2 + b^2 + 3$.

8. Giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn:
$$b + 1 \mid a^2 + 1\ ,\ a + 1 \mid b^2 + 1$$
Chứng minh rằng a, b đều là các số lẻ.

9. *(Putnam 1998)* Chứng minh rằng với mỗi số thực N thì phương trình:
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$
có nghiệm (a_1, a_2, a_3, a_4) với a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên lớn hơn N.

Tài liệu

[1] ĐẶNG HÙNG THẮNG, NGUYỄN VĂN NGỌC, VŨ KIM THỦY,*Bài giảng số học,* Nhà xuất bản Giáo dục, 1993.

[2] NGUYỄN VĂN MẬU, ĐẶNG HÙNG THẮNG, TRẦN NAM DŨNG, ĐẶNG HUY RUẬN, *Một số vấn đề chọn lọc của số học,*Nhà xuất bản Giáo dục, 2012.

[3] NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG, *Bài tập phương trình nghiệm nguyên,* Trường Đông Toán học, 2015.

[4] LYBRARY MATHEMATICS AND YOUTH, *The Vietnam Mathematical Olympiad,* Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

[5] MARTIN AIGNER, *Markov' theorem and 100 years of the Uniqueness Conjecture*, Springer Verlag , 2013.

[6] M.G.KREIN, *Markov's Diophant Equation,* Kvant 1985, no.4, 13-16.

[7] AUTHUR ENGEL, *Proplem Solving Strategies*, Springer Verlag , 1998.

[8] YIMIN GE, *The method of Viete Jumping.*